Nombre de zéros des solutions d'une équation différentielle

[Zuily - Queffélec]

Thm : Soient $a \in \mathbb{R}$, $q : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On suppose que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q} = +\infty$ et $q'(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(q(x)^{3/2}\right)$.
Soit y une solution réelle non nulle de $y'' + qy = 0$ sur $[a, +\infty[$.
Si $N(x)$ désigne le nombre de zéros de y sur $[a, x]$, alors $N(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q}$

Pour $x \in [a, +\infty[$, posons $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q}$. La fonction τ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$
et $\tau' = \sqrt{q} > 0$.
Donc τ est bijection croissante $[a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, τ^{-1} aussi $\mathbb{R}_+ \to [a, +\infty[$.
On pose alors $Y = y \circ \tau^{-1}$, i.e. $y = Y \circ \tau$.
$y'(x) = \sqrt{q(x)}\, Y'(\tau(x))$ et $y''(x) = \dfrac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} Y'(\tau(x)) + q(x)\, Y''(\tau(x))$.
L'équation $y'' + qy = 0$ devient alors $Y''(t) + \varphi(t) Y'(t) + Y(t) = 0$ avec $\begin{cases} t = \tau(x) \\ \varphi(t) = \dfrac{q'(x)}{2q(x)^{3/2}} \end{cases}$

__Lemme de relèvement__.
Soient $y_1, y_2 : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sans zéro commun.
Si $y_1(a) + i y_2(a) = r_0 e^{i\theta_0}$, alors $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, avec $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$ et
$\theta = \theta_0 + \int_a^x \frac{w}{r^2}$, où $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Posons $\varphi = y_1 + i y_2$ (ne s'annule pas) et $\psi : x \mapsto \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt + \ln r_0 + i\theta_0$.
$(\varphi e^{-\psi})' = 0$, donc $y_1 + i y_2 = e^{\psi} = r e^{i\theta}$ où $r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, $\theta = \operatorname{Im} \psi$.
Or $\psi(x) = \ln r_0 + i\theta_0 + \int_a^x \frac{(y_1' + i y_2')(y_1 - i y_2)}{r^2}$ donc $\theta(x) = \theta_0 + \int_a^x \frac{w(t)}{r(t)^2} dt$.

Si Y et Y' avaient un zéro commun en t_0, alors le problème de Cauchy
$\begin{pmatrix} Y' \\ Y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y \\ Y' \end{pmatrix}$ (et A est continue) de condition initiale $\begin{pmatrix} Y(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
a une unique solution : la solution nulle. Mais $Y \neq 0$.
Donc, Y et Y' n'ont pas de zéro commun, le lemme de relèvement assure
$Y = r\sin\theta$, $Y' = r\cos\theta$.
$\begin{cases} Y' = r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta \\ Y'' = r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -\varphi r\cos\theta - r\sin\theta \end{cases}$
La relation $\cos\theta\,(L_1) - \sin\theta\,(L_2)$ assure $r\theta' = r + \varphi r \cos\theta \sin\theta$
i.e. $\theta' = 1 + \varphi \frac{\sin 2\theta}{2}$ car r ne s'annule pas

De là, $|\theta'(t) - 1| \leq \frac{|\varphi(t)|}{2} \longrightarrow 0$ par hypothèse, donc $\theta'(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
Puisque $\int_0^{+\infty} 1\, dt$ est divergente, $\theta(t) - \theta(0) \sim t$, donc $\theta(t) \underset{+\infty}{\sim} t$

· Notons M_a^b le nombre de zéros de Y sur $[a,b]$.

Soit $t_0 \geq 0$ tq $\theta'_{|[t_0,+\infty[} > 0$. Soit $t \geq t_0$.

$$M_{t_0}^t = \#\{u \in [t_0,t],\ \sin(\theta(u)) = 0\} = \#\{k \in \mathbb{Z},\ \theta(t_0) \leq k\pi \leq \theta(t)\} = \left\lfloor \frac{\theta(t)}{\pi} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\theta(t_0)}{\pi} \right\rceil + 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\theta(t)}{\pi} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{\pi}$$

Si par l'absurde $M_0^{t_0} = \infty$, alors $E = \{u \in [0,t_0],\ Y(u) = 0\}$ a un point d'accumulation u. Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $u_n \to u$, alors par continuité, $Y(u) = 0$ et $Y'(u) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{Y(u_n) - Y(u)}{u_n - u} = 0$. donc u est zéro commun à Y et Y', absurde.

Donc $M_0^{t_0} < \infty$, puis $M_0^t \sim M_{t_0}^t \sim \frac{t}{\pi}$.

Enfin, $N(x) = \#\{s \in [a,x],\ y(s) = 0\} = \#\{t \in [0,\tau(x)],\ Y(t) = 0\} = M_0^{\tau(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\tau(x)}{\pi}$